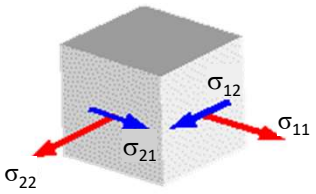
Плоское напряженное состояние

σ_{11}, σ_{22}, $\sigma_{12}=\sigma_{21} \neq 0$, и s_{33}, $\sigma_{31}=\sigma_{13}$, $\sigma_{32}=\sigma_{23}=0$



Главные напряжения определяются из уравнения

$$\begin{vmatrix} \sigma_{11}-\lambda & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{21} & \sigma_{22}-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = 0, \quad \textbf{(20)}$$

или $\lambda[(\sigma_{11}-\lambda)(\sigma_{22}-\lambda)-\sigma_{12}^2]=0$

Решение: $(\lambda=)\ \sigma = 0$ *(площадка, $\perp z$)*

или $$(\lambda=)\ \sigma_{1,2}=\frac{\sigma_{11}+\sigma_{22}}{2}\pm\sqrt{\frac{(\sigma_{11}-\sigma_{22})^2}{4}+\sigma_{12}^2} \quad \textbf{(21)}$$

Наибольшее касательное напряжение: $\tau_{\max}=\frac{\sigma_1-\sigma_2}{2}$

15

Положение главных площадок

Для определения положения главных площадок, параллельных оси z решаем систему (10) относительно n_1 $\begin{pmatrix} \sigma_{11}-\lambda & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22}-\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \end{pmatrix}=0$

$$\left.\begin{aligned}(\sigma_{11}-\lambda)\cdot n_1+\sigma_{12}\cdot n_2=0\\ \sigma_{21}\cdot n_1+(\sigma_{22}-\lambda)\cdot n_2=0\end{aligned}\right\} \quad \textbf{(22)}$$

Исключая λ, с учетом симметрии тензора напряжений:

$$\sigma_{21}(n_1^2-n_2^2)+n_1n_2(\sigma_{22}-\sigma_{11})=0. \quad \textbf{(23)}$$

Тогда тангенс двойного угла, на который нужно повернуть ось x, чтобы она совпала с направлением нормали к первой главной площадке:

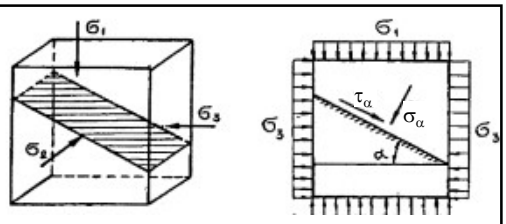
$$\mathrm{tg}2\alpha=\frac{2n_1n_2}{n_1^2-n_2^2}=\frac{2\sigma_{12}}{\sigma_{11}-\sigma_{22}} \quad \textbf{(24)}$$

Задание: вывести из (23)→(24), с учетом $n_1^2+n_2^2=1$

Частный случай:
если $\sigma_{11}=\sigma_{22}$, то знаменатель =0
тогда $\mathrm{tg}2\alpha\to\infty$; или $2\alpha=\pi/2$; и $\alpha=\pi/4$.

16

Напряжения на наклонной площадке (2D)



главные напряжения σ_1 и σ_3

В главных осях тензор напряжений диагонален:

$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_3 \end{pmatrix}$.

Единичная нормаль к наклонной площадке имеет компоненты: $n_1 = \cos\alpha, \quad n_3 = -\sin\alpha$ (знак у n_3 зависит от того, в какую сторону направлена нормаль; на квадраты не влияет).

Вектор напряжений (тракция) на площадке по формуле Коши (3):

$$T_i = \sigma_{ij} n_j,$$

то есть: $T_1 = \sigma_1 n_1 = \sigma_1 \cos\alpha, \qquad T_3 = \sigma_3 n_3 = -\sigma_3 \sin\alpha.$

Нормальное напряжение σ_N—проекция вектора T на нормаль (5), (6):

$$\sigma_{N\alpha} = T_1 n_1 + T_3 n_3 = \sigma_1 \cos^2\alpha + \sigma_3 \sin^2\alpha. \qquad \textbf{(25)}$$

Или $$\sigma_{N\alpha} = \frac{\sigma_1+\sigma_3}{2} + \frac{\sigma_1-\sigma_3}{2}\cos 2\alpha \qquad \textbf{(25*)}$$

Касательное напряжение τ_α— проекция T на направление площадки.

Единичный вектор *вдоль* площадки: $t_1 = \sin\alpha, \qquad t_3 = \cos\alpha.$

Тогда

$$\tau_\alpha = T_1 t_1 + T_3 t_3 = \sigma_1 \cos\alpha \sin\alpha - \sigma_3 \sin\alpha \cos\alpha = (\sigma_1 - \sigma_3)\sin\alpha \cos\alpha.$$

Или $$\tau_\alpha = \frac{\sigma_1-\sigma_3}{2}\sin 2\alpha. \qquad \textbf{(26)}$$

Знак τ зависит от выбранного положит. направления τ; по модулю $|\tau_\alpha| = \frac{|\sigma_1-\sigma_3|}{2}|\sin 2\alpha|$

17

Изотропное и девиаторное напряжение

Тензор напряжений можно разделить на две части:
изотропное и **девиаторное** напряжение

Изотропное напряжение σ_{cp} определяется как $\sigma_{cp} = 1/3\ (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = p$
Оно представляет среднее нормальное напряжение, или *давление*.

В силу **инвариантности** давления $p = 1/3\ (\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz})$.

Вычитание среднего нормального напряжения из тензора напряжений даёт **девиаторное напряжение** σ_{ij}^d:

$$\sigma_{ij}^d = \sigma_{ij} - p$$

Девиаторное напряжение представляет ту часть напряжения, которая **отличается от гидростатического (литостатического)** состояния.

$$\sigma_{ij}^d = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} - p & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} - p & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} - p \end{pmatrix}$$

для описания напряжений, вызванных, например, *тектоническими* причинами

18

Интенсивность тензора напряжений

Интенсивность тензора напряжений (или просто **интенсивностью напряжений**, σ_i) — это **скалярная** инвариантная величина, которая характеризует «напряжённость» сложного напряжённого состояния в точке, независимо от выбора системы координат.

Определяется через **второй инвариант девиатора напряжений** I_2 $\quad \sigma_i = \sqrt{3I_2}$,

Через **компоненты тензора** в произвольной системе координат:

$$\sigma_i = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(\sigma_{11}-\sigma_{22})^2 + (\sigma_{22}-\sigma_{33})^2 + (\sigma_{33}-\sigma_{11})^2 + 6(\sigma_{12}^2+\sigma_{23}^2+\sigma_{31}^2)}.$$

Через **главные напряжения** $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$:

$$\sigma_i = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(\sigma_1-\sigma_2)^2 + (\sigma_2-\sigma_3)^2 + (\sigma_3-\sigma_1)^2}$$

Играет ключевую роль в теориях пластичности и предела прочности.

Физический смысл: Интенсивность напряжений — это **эквивалентное одноосное напряжение**. Если образец деформировать одноосно напряжением σ_i, то в его материале будет накоплена такая же энергия деформации (и созданы такие же условия для начала пластического течения), как и при данном сложном напряжённом состоянии.

19

Графический способ определения напряжений. Круги Мора

- Круг Мора строится в координатах «нормальное напряжение σ — касательное напряжение τ».
- Центр круга всегда лежит на оси σ и равен **среднему нормальному** напряжению:

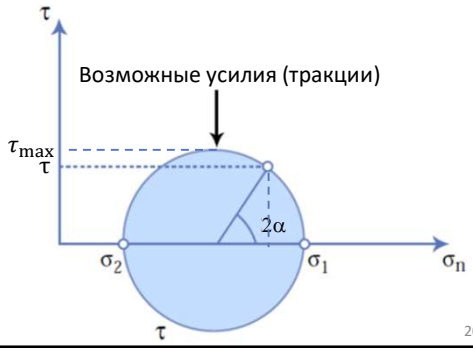
$$C = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}.$$

- Радиус круга равен **максимальному касательному** напряжению:

$$R = \tau_{max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}.$$

- Точки пересечения круга с осью σ — главные напряжения, в них $\tau = 0$.
- Взаимно **перпендикулярным** площадкам соответствуют **диаметрально противоположные** точки круга.

- Если $\sigma_1 = \sigma_2$, круг вырождается в точку: все площадки главные, $\tau = 0$.
- Если $\tau_\alpha = 0$ и $\sigma_\alpha \neq \sigma_\beta$, исходные площадки уже главные.



20

Определение напряжения на площадках по главным напряжениям (2D)

Дан элемент, по боковым граням которого действуют главные напряжения σ_1 и σ_2.
Требуется **графически** определить напряжения σ_α (σ_{11}), σ_β (σ_{22}), τ_α (σ_{12}), τ_β (σ_{21}), действующие на наклонные площадки α и β (т.е. напряжения в повернутой СК относит. главных осей).

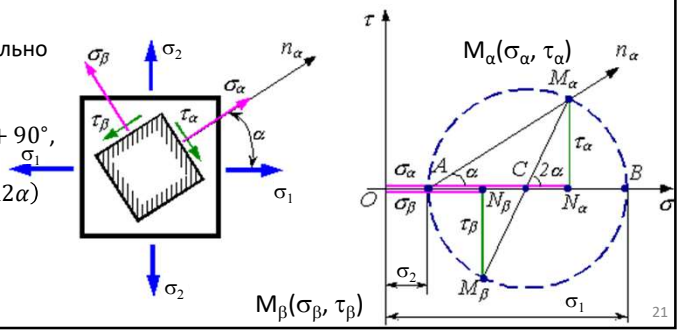
Алгоритм:

1. выбрать прямоугольную систему координат (σ, τ) так, чтобы ось абсцисс (σ) была параллельна **большему** из главных напряжений;
2. на оси абсцисс от начала координат отложить отрезки, численно равные главным напряжениям σ_1 и σ_2, и на их разности, как на диаметре построить окружность (центр – т.С)

$$C = \frac{\sigma_1+\sigma_2}{2};\ R = \frac{\sigma_1-\sigma_2}{2} = \tau_{\max};$$

3. из крайней левой точки А окружности провести луч, параллельный нормали n_α к площадке α. Пересечение с окр. дает точку $M_\alpha(\sigma_\alpha, \tau_\alpha)$ или $M_\alpha(C + R\cos 2\alpha,\ R\sin 2\alpha)$. (см. ф-лы (25*), (26)).

4. Симметричная относительно т.С точка дает $M_\beta(\sigma_\beta, \tau_\beta)$
Для перпендикулярной площадки β угол равен $\alpha + 90°$, и
$M_\beta = (C - R\cos 2\alpha,\ -R\sin 2\alpha)$



21

Определение главных напряжений и главных площадок по компонентам напряжений на площадке (2D)

Дан элемент, по боковым граням которого действуют напряжения σ_α и σ_β, τ_α и τ_β
Требуется **графически** определить главные напряжения и ориентацию главных площадок.

Алгоритм:

1. выбрать прямоугольную систему координат (σ, τ) так, чтобы ось была параллельна большему из напряжений;
2. на оси абсцисс отложить отрезки, численно равные σ_α и σ_β; в концах этих отрезков, учитывая знаки, восстановить перпендикуляры, соответственно равные τ_α и τ_β;
Т.е. строим т. $M_\alpha(\sigma_\alpha, \tau_\alpha)$ и т. $M_\beta(\sigma_\beta, \tau_\beta)$.
3. соединить концы этих перпендикуляров и на полученном отрезке, как на диаметре, построить окружность;
4. Точки пересечения окружности с осью σ дают **главные напряжения**:

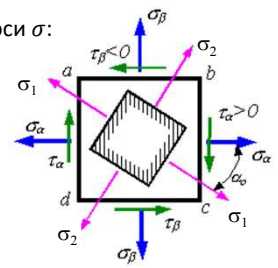
$$OA = \sigma_2, \qquad OB = \sigma_1 \text{ (если } \sigma_1 > \sigma_2);$$

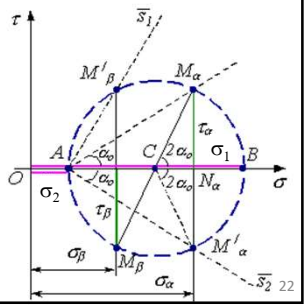
5. **Центр** окружности лежит на оси σ:

$$OC = \frac{\sigma_\alpha + \sigma_\beta}{2} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} = \frac{1}{2}I_1.$$

Радиус:

$$R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_\alpha - \sigma_\beta}{2}\right)^2 + \tau_\alpha^2}.$$





22

Величины главных напряжений

$$\sigma_{1,2} = OC \pm R = \frac{\sigma_\alpha + \sigma_\beta}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_\alpha - \sigma_\beta}{2}\right)^2 + \tau_\alpha^2}.$$

Аналогично (21), только записано через напряжения на **произвольно ориентированных** взаимно перпендикулярных площадках.

6. **Ориентация** главных осей.
Угол между радиусом CM_α и осью σ равен $2\alpha_0$,
где α_0 — угол между нормалью к исходной площадке α и главной осью σ_1:

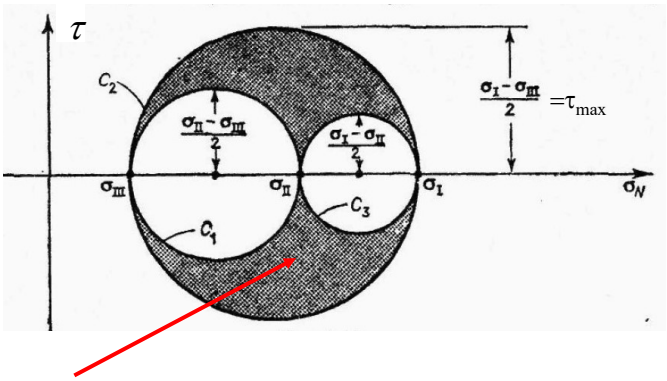
$$\mathrm{tg}2\alpha_0 = -\frac{2\tau_\alpha}{\sigma_\alpha - \sigma_\beta}.$$

Знак зависит от принятого правила знаков для τ.
Если $\alpha_0 > 0$, угол отсчитывается против часовой стрелки; если $\alpha_0 < 0$ — по часовой.

23

Трехосное напряженное состояние

В трёхосном состоянии строят **три** круга Мора — для пар σ_1, σ_2; σ_2, σ_3; σ_1, σ_3.



Все возможные комбинации (σ_N, τ) лежат в заштрихованной области **между** этими кругами,

Максимальное касательное напряжение равно радиусу наибольшего круга:

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}.$$

24

Задания

Объемное напряженное состояние

Задача 1.

Тензор напряжений:

$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} 120 & 0 & 0 \\ 0 & 60 & 0 \\ 0 & 0 & -30 \end{pmatrix}$. (МПа)

Найти главные напряжения, главные оси и $\tau_{\max}$.

Задача 2.

Тензор напряжений:

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} 60 & 20 & 0 \\ 20 & 20 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix} \text{(МПа)}$$

Найти главные напряжения, направления главных осей и $\tau_{\max}$.

Плоское напряженное состояние

Задача 3.

В точке плоское напряжённое состояние:

$$\sigma_{11} = 80 \text{ МПа}, \quad \sigma_{22} = 20 \text{ МПа}, \quad \sigma_{12} = 0.$$

Найти главные напряжения и направления главных осей.

Задача 4.

В точке плоское напряжённое состояние:

$$\sigma_{11} = 40 \text{ МПа}, \quad \sigma_{22} = 10 \text{ МПа}, \quad \sigma_{12} = 15 \text{ МПа}.$$

Найти главные напряжения и угол наклона главных осей.

Задача 5.

Решить задачу 4 с помощью круга Мора

28